b) • On a : $\forall x\in[\frac{\pi}{4},+\infty[, -1\le\sin x\le 1$ et $-1\le-\cos x\le 1$

donc $-2\le-\cos x+\sin x\le 2 \Rightarrow 0\le 2-\cos x+\sin x\le 4$

d'autre part on a : $\forall x\in[\frac{\pi}{4},+\infty[, 3x+1>0$ donc $\forall x\in[\frac{\pi}{4},+\infty[, \ f(x)\ge 0$

• On a : $\forall x\in[\frac{\pi}{4},+\infty[, \ 2-\cos x+\sin x\le 4 \Rightarrow \frac{2-\cos x+\sin x}{3x+1}\le\frac{4}{3x+1}$

or $\frac{4}{3x+1}-\frac{2}{x}=\frac{-(2x+2)}{x(3x+1)}\le 0$ car $x\in[\frac{\pi}{4},+\infty[$ d'où $\forall x\in[\frac{\pi}{4},+\infty[, \ f(x)\le\frac{2}{x}$.

Conclusion : $\forall x\in[\frac{\pi}{4},+\infty[, \ 0\le f(x)\le\frac{2}{x}$.

• On a : $\forall x\in[\frac{\pi}{4},+\infty[, \ 0\le f(x)\le\frac{2}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

2°/• $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-}x(x-\frac{\pi}{4})=0$

• $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\frac{-\cos x+\sin x+2}{3x+1}=\frac{2}{3\cdot\frac{\pi}{4}+1}$

$f(\frac{\pi}{4})=\frac{2}{\frac{3\pi}{4}+1}$ donc f n'est pas continue à gauche en $\frac{\pi}{4}$, et f est

continue à droite en $\frac{\pi}{4}$.

Solution 7 :

1°/ Pour tout $x\in\mathbf{R}$, on a : $(-x)\in\mathbf{R}$ et $f_m(-x)=-f_m(x)$ donc f_m est impaire.

2°/ La fonction $x\mapsto\frac{\sin(mx^2)}{x}$ est continue sur $\mathbf{R}^*$ comme composée et

produit de fonctions continues sur $\mathbf{R}^*$: $x\mapsto\sin(mx^2)$ et $x\mapsto\frac{1}{x}$.

• $\lim\limits_{x\to0}f_m(x)=\lim\limits_{x\to0}x\frac{\sin(mx^2)}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to0}x=0$ et $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(mx^2)}{x^2}=\lim\limits_{X\to0}\frac{\sin(mX)}{X}=m$